

Facoltà di Ingegneria
Prova scritta di Fisica II – 28.04.2005 – Compito B

Nota: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

Esercizio n. 1 (grado di difficoltà: 1)

In un sistema di riferimento cartesiano, di origine O ed assi x, y, z (con versori rispettivamente \hat{i} , \hat{j} e \hat{k}), il potenziale elettrostatico ha espressione $V(x, y, z) = ax + \frac{1}{2}by^2$ con a e b costanti dimensionali di valori: $a = 1 \frac{V}{m}$ e $b = 1 \frac{V}{m^2}$.

Determinare:

- l'energia potenziale elettrostatica di una carica $q_1 = +2 \mu C$, posta nel punto $P \equiv (1, 1, 2)$
- la forza elettrostatica \vec{F} su una carica $q_2 = -1 nC$ posta nel punto $S \equiv (2, 1, 0)$

Nota: se non altrimenti indicato, è inteso che le distanze sono espresse in metri; ad esempio $P \equiv (1, 1, 2)$ significa che per P è $x = 1m, y = 1m, z = 2m$. Si ricorda che la relazione tra campo elettrico e potenziale nel punto (x,y,z) è:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

Rispondere quindi alle seguenti domande:

1. l'energia potenziale elettrostatica della carica $q_1 = +2 \mu C$ nel punto $P \equiv (1, 1, 2)$ vale
 - A. $105 \mu J$
 - B. $17 \mu J$
 - C. $3 \mu J$ (*)
 - D. $35 mJ$
2. la forza elettrostatica \vec{F} sulla carica $q_2 = -1 nC$ nel punto $S \equiv (2, 1, 0)$ vale
 - A. $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot 10^{-9} N$
 - B. $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{k}) \cdot 10^{-9} N$
 - C. $\vec{F} = (\hat{i} + \hat{j}) \cdot 10^{-9} N$ (*)
 - D. $\vec{F} = (2\hat{i} + \hat{k}) \cdot 10^{-9} N$

Si noti, a titolo di esempio, che la scrittura $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot 10^{-9} N$ significa $F_x = 1 \cdot 10^{-9} N, F_y = 2 \cdot 10^{-9} N, F_z = 1 \cdot 10^{-9} N$.

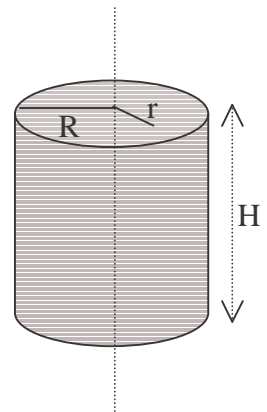
Esercizio n. 2 (grado di difficoltà: 1,5)

Un cilindro retto di materiale isolante, di altezza H e raggio R, contiene carica negativa distribuita simmetricamente rispetto al proprio asse con densità volumica $\rho(r) = Ar$, dove A è una costante < 0 .

Si risponda alle seguenti domande:

3. La carica totale posseduta dal cilindro vale:

- A. $Q = \frac{2\pi AHR^5}{5}$
- B. $Q = \frac{2\pi AHR^3}{3}$ (*)
- C. $Q = \frac{12\pi R^4}{7} H$
- D. $Q = \frac{3\pi HR^3}{5A}$



4. Assumendo che $R/H \ll 1$ in maniera che si possa considerare il cilindro come se fosse indefinito, si calcoli, utilizzando la legge di Gauss, il campo elettrostatico $\vec{E}(r)$ esternamente al cilindro, in un generico punto P a distanza r dall'asse dove $r > R$:

- A. $\vec{E}(r) = \frac{AR^3}{5\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{r}$
 B. $\vec{E}(r) = -\frac{R}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r}$
 C. $\vec{E}(r) = -\frac{AR^2}{5\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^5} \hat{r}$
 D. $\vec{E}(r) = \frac{AR^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{r} \quad (*)$

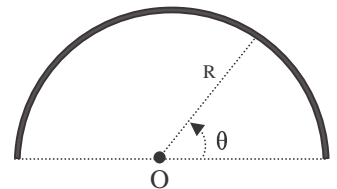
Esercizio n. 3 (grado di difficoltà: 1,5)

Un filo, sottile, non conduttore, carico, e' piegato a forma di semicirconfenza di raggio R , come mostrato in figura.

Se la sua carica e' distribuita con densità lineare $\lambda = \lambda_0 e^\theta$, dove θ è l'angolo mostrato in figura, si studino le proprietà elettrostatiche di questa distribuzione di carica e si risponda alle seguenti domande:

5. La carica elettrica totale posseduta dal filo vale:

- A. $Q = \lambda_0 R e^\pi$
 B. $Q = \lambda_0 2\pi R$
 C. $Q = 2\lambda_0 e^{R\pi}$
 D. $Q = \frac{1}{2} \lambda_0 \frac{1}{e^\pi}$



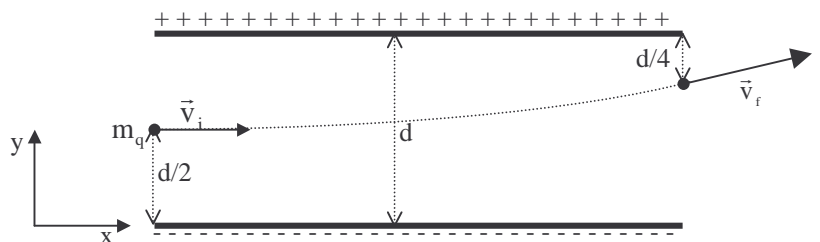
6. Il potenziale elettrostatico V misurato nel centro O della semicirconfenza vale, rispetto al suo valore, considerato nullo, all'infinito:

- A. $V(O) = \frac{\lambda e^\pi}{4\pi\epsilon_0}$
 B. $V(O) = \frac{1}{2} \lambda_0 \frac{1}{R e^\pi}$
 C. $V(O) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R}$
 D. $V(O) = 0$

Esercizio n. 4 (grado di difficoltà: 1)

Un elettrone, di carica $-q$ e massa m_q , viene sparato in un condensatore piano, vuoto, avente armature di area A e a distanza d l'una dall'altra (con $d \ll \sqrt{A}$). Il condensatore è carico e la differenza di potenziale tra le armature vale V_C .

L'elettrone entra nel condensatore alla distanza $\frac{d}{2}$ da ciascuna delle due lastre e con velocità



\vec{v}_i parallela alle lastre. All'uscita dal condensatore, l'elettrone è a distanza $\frac{d}{4}$ dalla lastra carica positivamente ed il modulo della sua velocità vale $|\vec{v}_f| = v_f$

Determinare il modulo della velocità $|\vec{v}_i| = v_i$ dell'elettrone all'ingresso del condensatore, trascurando l'effetto della gravità.

Rispondere quindi alle seguenti domande

7. con riferimento alla figura, ed assumendo nullo il potenziale della lastra carica negativamente, il potenziale in un punto generico $P \equiv (x, y)$ all'interno del condensatore vale

A. $V = \frac{V_c}{d} (x + y)$

B. $V = \frac{V_c}{d} y (*)$

C. $V = V_c y^2$

D. $V = \frac{V_c}{d^2} \frac{y}{x}$

8. il modulo della velocità \vec{v}_i con cui l'elettrone entra nel condensatore ha espressione

A. $v_i = \sqrt{\frac{qV_c}{4m_q}}$

B. $v_i = \sqrt{v_f^2 + \frac{qV_c}{m_q}}$

C. $v_i = v_f$

D. $v_i = \sqrt{v_f^2 - \frac{qV_c}{2m_q}} (*)$

Esercizio n. 5 (grado di difficoltà: 1)

Quattro cariche puntiformi rispettivamente di intensità $Q_1 = +q$, $Q_2 = -2q$, $Q_3 = +q$, $Q_4 = -2q$, sono posizionate ai vertici di un quadrato di lato L , come mostrato in figura.

Studiare le proprietà elettrostatiche di questa configurazione di carica dal punto di vista energetico e rispondere alle seguenti domande:

9. l'energia potenziale elettrostatica associata alla configurazione di cariche mostrata in figura, calcolata rispetto al suo valore nullo all'infinito, vale:

A. $U_{\text{elett}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$

B. $U_{\text{elett}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (5\sqrt{2} - 16) (*)$

C. $U_{\text{elett}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$

D. $U_{\text{elett}} = 0$

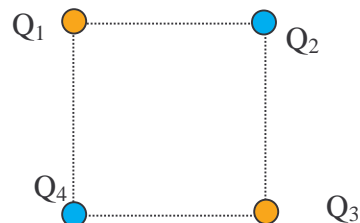
10. il lavoro compiuto dal campo elettrico per spostare la carica Q_3 dalla sua posizione iniziale, mostrata in figura, all'infinito, vale:

A. $W_{\text{elettrico}} = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 L^2}$

B. $W_{\text{elettrico}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (\sqrt{2} - 8) (*)$

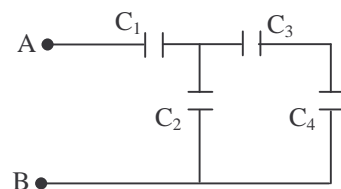
C. $W_{\text{elettrico}} = \frac{16q}{\pi\epsilon_0 L}$

D. $W_{\text{elettrico}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (3 + \sqrt{2})$



Esercizio n. 6 (grado di difficoltà: 1)

Quattro condensatori di capacità $C_1 = 6 \text{ mF}$, $C_2 = 7.5 \text{ mF}$, $C_3 = 6 \text{ mF}$, $C_4 = 2 \text{ mF}$ sono collegati come mostrato in figura. La differenza di potenziale tra i terminali A e B vale $V = V_A - V_B = 20 \text{ mV}$.



Calcolare:

- la capacità equivalente tra i terminali A e B
- l'energia elettrostatica complessiva immagazzinata nei 4 condensatori
- la carica sul condensatore di capacità $C_1 = 6 \text{ mF}$.

Rispondere quindi alle seguenti domande:

- la capacità equivalente tra i terminali A e B
 - $10 \mu\text{F}$
 - $130 \mu\text{F}$
 - 3.6 mF (*)
 - 36 mF
- l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema dei 4 condensatori vale
 - $3.2 \mu\text{J}$
 - $10.5 \mu\text{J}$
 - $0.06 \mu\text{J}$
 - $0.72 \mu\text{J}$ (*)
- la carica sul condensatore di capacità $C_1 = 6 \text{ mF}$ (che è uguale alla carica sul condensatore equivalente tra i terminali A e B) ha valore
 - $1 \mu\text{C}$
 - $130 \mu\text{C}$
 - 8 mC
 - 72 mC

Altre domande:

- la capacità di un condensatore dipende
 - dal dielettrico compreso tra le armature (*)
 - dalla differenza di potenziale applicata alle armature
 - dalla carica elettrica sulle armature.
 - dal materiale di cui sono fatte le armature
- la forza che si esercita tra due cariche puntiformi uguali, Q_1 e $-Q_2$ poste nel vuoto a distanza R risulta:
 - non dipendere dalla distanza
 - dipendere dalla velocità relativa tra le cariche
 - dipendere dal reciproco del quadrato della distanza (*)
 - dipendere dalla distanza elevata al cubo
- “Campo elettrostatico conservativo” significa che:
 - il lavoro compiuto dal campo su una carica puntiforme è indipendente dal percorso seguito dalla carica (*)
 - il campo è variabile nel tempo
 - il campo non dipende dalla posizione spaziale
 - il lavoro compiuto dal campo su una carica puntiforme è nullo per ogni cammino scelto
- in un materiale conduttore carico all'equilibrio elettrostatico si verifica che:
 - la carica in eccesso rimane localizzata al centro del conduttore
 - la carica in eccesso viene bilanciata dalla carica già presente nel conduttore
 - la carica in eccesso si distribuisce esclusivamente sulla superficie del conduttore (*)
 - la carica in eccesso si distribuisce uniformemente in tutto il volume del conduttore

Soluzioni

Esercizio n.1

L'energia potenziale della carica $q_1 = +2 \text{ mC}$ nel punto $P \equiv (1,1,2) \text{ m}$ vale

$$U = q_1 V(P) = q_1 V(1,1,2) = 2 \mu\text{C} \cdot \left(1 \frac{V}{m} \cdot (1\text{m}) + \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{V}{m^2} \cdot (1\text{m})^2 \right) = 2 \mu\text{C} \cdot \frac{3}{2} V = 3 \mu\text{J}$$

Il campo elettrico in un punto di coordinate (x, y, z) vale:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = -a \hat{i} - b y \hat{j}$$

In particolare, nel punto $S \equiv (2,1,0)$, il campo elettrico vale

$$\vec{E}(S) = \vec{E}(2,1,0) = -1 \frac{V}{m} \hat{i} - 1 \frac{V}{m^2} \cdot 1\text{m} \hat{j} = \left(-\hat{i} - \hat{j} \right) \frac{V}{m}$$

Si noti che il campo elettrico è espresso nell'unità $\frac{V}{m} \left(= \frac{N}{C} \right)$

La forza elettrostatica sulla carica $q_2 = -1 \text{ nC}$, nel punto $S \equiv (2,1,0)$, vale:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q_2 \vec{E}(S) = q_2 \vec{E}(2,1,0) = q_2 \left(-a \hat{i} - b y \hat{j} \right) = -1 \text{ nC} \cdot \left(-\hat{i} - \hat{j} \right) \frac{V}{m} = \\ &= \left(\hat{i} + \hat{j} \right) \text{ nC} \frac{V}{m} = \left(\hat{i} + \hat{j} \right) \text{ nC} \frac{N}{C} = \left(\hat{i} + \hat{j} \right) \text{ nN} = \left(\hat{i} + \hat{j} \right) \cdot 10^{-9} \text{ N} \end{aligned}$$

Esercizio n.2

La carica elettrica contenuta all'interno del volume cilindrico è data da

$$Q = \int dq = \int_{V_{\text{cilindro}}} \rho dv = \int_0^R Ar(2\pi r H dr) = \frac{2\pi AHR^3}{3}$$

Nell'ipotesi che H sia tale che $H \gg R$ possiamo considerare il cilindro infinitamente lungo ed applicare la legge di Gauss

$$\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_A} \rho dv$$

dove, data la simmetria cilindrica esibita dalla distribuzione di carica, A è una superficie gaussiana cilindrica coassiale col cilindro e avente raggio di base pari a r .

Esternamente al cilindro di carica, cioè per $r > R$ abbiamo che

$$E 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2\pi AHR^3}{3}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\vec{E}(r) = \frac{AR^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{r}$$

Esercizio n.3

La carica elettrica totale posseduta dal filo non conduttore è data dalla seguente espressione:

$$Q = \int dq = \int_{\text{Filo}} \lambda dl = \int_0^\pi (\lambda_0 e^{\theta} R d\theta) = \lambda_0 R (e^\pi - 1)$$

Il valore del potenziale elettrostatico $V(O)$ nel punto O , rispetto al suo valore nullo all'infinito, potrebbe in linea di principio essere calcolato applicando la definizione di potenziale elettrostatico, ovvero:

$$V(O) - V(\infty) = \int_O^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

in quanto la conservatività del campo elettrostatico ci consente di scegliere il cammino più semplice tra i punti A e B , ma rimane la difficoltà di non conoscere l'espressione esplicita del campo elettrostatico lungo tutti i punti del cammino anche quello più semplice. Pertanto questa strada non è percorribile per la risoluzione del quesito.

Ma, ricordando che il potenziale elettrostatico, rispetto all'infinito, di una carica puntiforme dq , vale:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

possiamo ricorrere al Principio di Sovrapposizione degli effetti per scrivere che:

$$V(O) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

che nel nostro caso diventa banalmente:

$$V(O) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Filo}} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int \lambda dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} Q = \frac{\lambda_0 (e^\pi - 1)}{4\pi\epsilon_0}$$

Esercizio n. 4

Il campo all'interno del condensatore è uniforme ed ha valore

$$\vec{E} = -\frac{V_c}{d} \hat{j}$$

(\hat{i} e \hat{j} sono i versori dell'asse x e y).

Il potenziale di un punto generico $P \equiv (x, y)$ all'interno del condensatore, assumendo nullo il potenziale V_- della lastra negativa del condensatore ($V_- = 0$), risulta:

$$V(P) - V_- = V(P) = -\int_S^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_S^P \left(-\frac{V_c}{d} \hat{j} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \frac{V_c}{d} \int_S^P dy = \frac{V_c}{d} \int_0^y dy = \frac{V_c}{d} y$$

dove si è indicato con S un punto qualsiasi della lastra carica negativamente.

L'energia potenziale elettrostatica dell'elettrone quando l'elettrone entra nel condensatore vale quindi:

$$U_{\text{ent}} = -q \cdot V\left(\frac{d}{2}\right) = -q \frac{V_c}{d} \frac{d}{2} = -q \frac{V_c}{2}$$

analogamente, l'energia potenziale elettrostatica dell'elettrone quando l'elettrone esce dal condensatore vale:

$$U_{\text{usc}} = -q \cdot V\left(d - \frac{d}{4}\right) = -q \cdot V\left(\frac{3d}{4}\right) = -q \frac{3V_c}{4}$$

Poiché il campo elettrico è conservativo possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia (cinetica + potenziale) al moto dell'elettrone, tra la posizione in cui esso entra nel condensatore e quella in cui esce dal condensatore:

$$K_{\text{ent}} + U_{\text{ent}} = K_{\text{usc}} + U_{\text{usc}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_q v_i^2 - q \frac{V_c}{2} = \frac{1}{2} m_q v_f^2 - q \frac{3V_c}{4} \Rightarrow v_i = \sqrt{v_f^2 - \frac{qV_c}{2m_q}}$$

Esercizio n.5

L'energia potenziale elettrostatica posseduta dalla struttura di cariche descritta è semplicemente il lavoro che è necessario compiere dall'esterno in maniera da portare ciascuna carica elettrica dall'infinito alla posizione richiesta.

Calcolando esplicitamente questo lavoro per ciascuna delle cariche, tenendo conto che $\vec{F}_{\text{esterna}} = -\vec{F}_{\text{Elettrostatica}}$ sommando tutti i contributi ottenuti si perviene facilmente alla seguente espressione:

$$U_{\text{elettrostatica}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

che nel nostro particolare caso diventa:

$$U_{\text{elettrostatica}} = 4 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{2}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{2}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (5\sqrt{2} - 16)$$

con ovvio significato delle quantità utilizzate.

Il lavoro, fatto dal campo elettrico per portare la carica q_3 dalla posizione occupata in figura all'infinito vale:

$$W_{\text{Elettrostatico}} = -W_{\text{esterno}} = U_{\text{iniziale}} - U_{\text{finale}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (\sqrt{2} - 8)$$

dove

$$U_{\text{finale}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} (-4 + 2\sqrt{2})$$

è l'energia potenziale della configurazione delle tre cariche rimanenti dopo l'allontanamento di q_3 all'infinito e

$$U_{\text{iniziale}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} (5\sqrt{2} - 16)$$

Esercizio n.6

I condensatori di capacità C_3 e C_4 sono in serie, quindi sono equivalenti ad un

condensatore di capacità $C_s = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 1.5 \text{ mF}$

Il condensatori di capacità C_2 e C_s sono in parallelo, quindi hanno capacità equivalente

$$C_p = C_2 + C_s = 9 \text{ mF} .$$

Infine il condensatore C_1 è in serie con il condensatore di capacità C_p , quindi la capacità totale tra i morsetti A e B risulta:

$$C_T = \frac{C_p C_1}{C_p + C_1} = 3,6 \text{ mF} .$$

La energia elettrostatica complessiva del sistema dei 4 condensatori vale

$$U = \frac{1}{2} C_T V^2 = \frac{1}{2} (3.6 \cdot 10^{-3} \text{ F}) (20 \cdot 10^{-3} \text{ V})^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3.6 \cdot 400 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} \text{ F V}^2 = 7.2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 7.2 \cdot 10^{-7} \text{ J} = 0.72 \text{ } \mu\text{J}$$

I condensatori di capacità C_1 e C_p sono in serie e quindi hanno cariche Q_1 e Q_p uguali tra loro ed uguali alla carica sul condensatore equivalente di capacità C_T : $Q_1 = Q_p = Q_T$.

La carica Q_T sul condensatore equivalente, di capacità $C_T = 3.6 \text{ mF}$, può essere facilmente calcolata:

$$Q_T = C_T V = 3.6 \text{ mF} \cdot 20 \text{ mV} = 72 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 72 \text{ } \mu\text{C} .$$

